# Problema de Fekete

*Segundo semestre de 2021*
*(16/08/21 a 26/11/21)*

**Responsables:** Diego Armentano, Marcelo Fiori, Nicolás Frevenza

**Público objetivo:** El seminario está dirigido a estudiantes de posgrado y estudiantes avanzados de la Licenciatura en Matemática.

**Conocimientos previos recomendados:** Análisis Real y Complejo, Geometría Diferencial, Probabilidad

**Método de aprobación del seminario:** 2 exposiciones por estudiante.

**Referencias a seguir:** En la primer parte se trabajará con el artículo [BG] dando una introducción al problema de Fekete, y motivandolo con otros problemas similares de optimización (sólo se trabajaran las primeras secciones de este artículo como motivación del seminario). Luego continuaremos con el artículo [BCCdR] donde se utiliza como herramienta –para atacar este problema– a las funciones de Green para el Laplaciano en variedades. También estudiaremos el artículo [RSZ] donde se estima la energía de configuraciones mínimas. Si disponemos de tiempo, intentaremos estudiar algún artículo con un enfoque más probabilista-computacional al tema. Por el momento hemos elegido el artículo [BCMT].

**Descripción:** De forma general, el problema a estudiar es: ¿*Cómo distribuir n puntos en una esfera que minimicen un potencial dado*?

Usualmente '*Cómo*' significa 'encontrar un algoritmo óptimo (y su orden)' y '*qué minimicen*' usualmente significa 'cuyo potencial diste del mínimo en un error $\varepsilon(n)$ preestablecido'. Una problema posterior, o tal vez simultáneo, es describir el patrón geométrico de la distribución de los puntos como función de $\varepsilon(n)$ (cuánto más pequeño es $\varepsilon$, más preciso es el patrón). Ejemplos computacionales pueden verse en las figuras.

El problema general posee una gran variedad de aplicaciones, incluyendo, *posición satelital*, *mapeos terrestres, cristalografía, geometría computacional*, *teoría de la complejidad* y *interpolación de funciones*. Requiere de una variedad de técnicas en *probabilidad*, *análisis armónico* o *análisis numérico*.

Proponemos prestarle especial atención al problema 7 de Smale, que corresponde al potencial logarítmico,

$$V = -\sum_{i \neq j} \ln |x_i - x_j|.$$

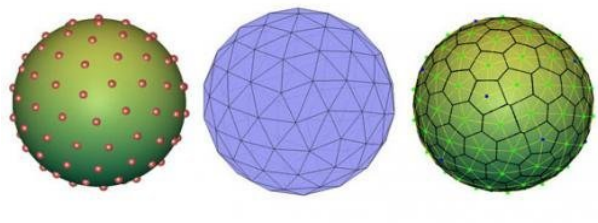

Figura 1: Distribución de puntos maximizando el volumen de su envolvente convexa.

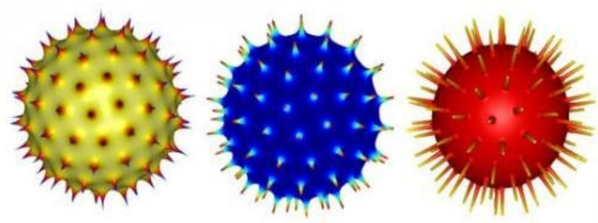

Figura 2: Distribución de puntos minimizantes de la energía de Riesz $V = \sum_{i\neq j} 1/|x_i - x_j|^s$ para $s = 0,1,1,4$.

Este problema está motivado por los trabajos realizados por Shub-Smale sobre el estudio de la complejidad del teorema de Bézout.

## Referencias


[BCCdR] Carlos Beltrán, Nuria Corral, and Juan G. Criado del Rey, *Discrete and continuous Green energy on compact manifolds*, J. Approx. Theory **237** (2019), 160–185. MR3868631

[BCMT] Mireille Bossy, Nicolas Champagnat, Sylvain Maire, and Denis Talay, *Probabilistic interpretation and random walk on spheres algorithms for the Poisson-Boltzmann equation in molecular dynamics*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **44** (2010), no. 5, 997–1048. MR2731401

[BG] Johann S. Brauchart and Peter J. Grabner, *Distributing many points on spheres: minimal energy and designs*, J. Complexity **31** (2015), no. 3, 293–326. MR3325677

[RSZ] E. A. Rakhmanov, E. B. Saff, and Y. M. Zhou, *Minimal discrete energy on the sphere*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 647–662. MR1306011