



FORMULARIO
Curso de Posgrado

1. Título: Teoría analítica de números

Abreviatura de título: Teoría analítica de números

2. Profesor: Harald Helfgott (CNRS)

3. Responsable: Gonzalo Tornaría

(en caso de no ser el Profesor un investigador del PEDECIBA)

4. Marque la disciplina más cercana al curso:

- Álgebra
- Análisis
- Análisis numérico
- Ecuaciones diferenciales; EDP
- Estadística
- Fundamentos
- Geometría
- Geometría algebraica
- Matemática Aplicada
- Probabilidad
- Sistemas Dinámicos
- **Teoría de Números**
- Otros: (especificar)

5. Fecha de inicio: 2do semestre 2026 (15 semanas)

6. Fecha de finalización estimada: 2do semestre 2026 (15 semanas)

7. Horas de clase teóricas: 4hs por semana – total 60 hs.

8. Horas de clase prácticas/consulta: 2hs por semana – total 30 hs.

9. Otros horarios de actividad presencial:

10. Total de horas presenciales (suma de los tres puntos anteriores): 90 hs.



11. Método de aprobación: entrega de ejercicios, presentaciones orales.

12. Conocimientos previos recomendados: Funciones de variable compleja, conocimientos básicos de álgebra abstracta. Es útil pero no imprescindible teoría de la medida.

13. Programa del Curso:

El objetivo de este curso es introducir métodos y conceptos clave de la teoría analítica de números, y desarrollar la capacidad de contestar preguntas de distribución mediante métodos analíticos. Se desarrollará lo esencial del análisis de Fourier, aplicado a la teoría de números.

Presentación y motivación:

Dentro de la matemática, la teoría analítica de números es un área central en la que muchos caminos convergen. Los enteros son algo discreto que forma una estructura algebraica, un anillo; empero, cuando nos planteamos preguntas analíticas (¿cuántos primos, por ejemplo, hay hasta un punto dado, aproximadamente? ¿Cuál es el término principal? ¿Cuál es el término de error?), recurrimos naturalmente a las herramientas analíticas, desarrolladas para lidiar con lo continuo: análisis real y complejo, análisis de Fourier, etc.

También veremos que ciertas nociones de probabilidad se invitan solas: se trata de una rama que lidia, justamente, con la distribución de objetos a gran escala.

Prerrequisitos informales y no-prerrequisitos, en parte para dar una idea del curso:

El curso tendrá una clara perspectiva armónica: el análisis de Fourier será uno de los principios unificadores. Al mismo tiempo, no lo pediremos como prerrequisito, sino que iremos desarrollando lo que necesitemos según vayamos avanzando.

En lo que se refiere al análisis real, sería bonito poder asumir recuerdos de teoría de la medida. Como no podemos hacerlo, y puede que no todos estén dispuestos a confabular tales recuerdos, estamos muy agradecidos por la existencia de la integral de Riemann–Stieltjes, la cual se explica rápidamente a quien haya visto un buen tratamiento de la integral de Riemann.

El análisis complejo es esencial para la teoría analítica de números. Hemos estructurado nuestro curso de tal manera que se pueda llevar un curso de funciones de variable compleja en paralelo, si no se ha llevado ya. El concepto de holomorfía (y meromorfía, residuos, etc.) se volverá esencial a mediados del curso.

No asumiremos conocimiento alguno de análisis funcional o geometría algebraica, pero introduciremos algunos conceptos (espacios de Hilbert, puntos racionales y



enteros en variedades) cuando lo que queramos hacer lo indique. En lo que es la teoría de probabilidades, no es necesario venir con nada fuera del concepto de esperanza («valor esperado», para los poco poéticos) y de cierta intuición que todo el mundo tiene.

Por último: se trata de un curso de posgrado y de grado avanzado. Incluso fuera del análisis, asumiremos cierto nivel de conocimientos (mal llamado «madurez matemática»): no nos detendremos a explicar qué es un cuerpo (salvo para decir «algunos lo llaman campo»), y asumiremos que se entiende, por ejemplo, lo que se quiere decir por un cociente como $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Temario desarrollado del curso:

Los tópicos optativos se trabajarán a menudo como problemas guiados.

Parte I: variable real

I.1. Las series formales y la aritmética:

- Operaciones básicas y convoluciones; transformadas y objetos analíticos.
- Inclusión-exclusión. Función de Möbius.
- Convoluciones. Inversión de Möbius. Función de von Mangoldt. Identidades.
- Series formales de Dirichlet. Convolución y multiplicación. Derivadas.
- Series q : convolución aditiva y multiplicación. Más identidades.

I.2. Sumas y asintóticas:

- Euler–Maclaurin.
- Sumas y convoluciones. Esperanzas de sumas de divisores.
- Método de la hipérbola.
- Sumación de Abel. Chebyshev. Mertens.
- Esperanza y varianza del número de divisores primos (Turán).
- Enunciados equivalentes al teorema de los números primos.
- *Tópico optativo*: prueba elemental del teorema de los números primos.

I.3. Análisis de Fourier en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$:

- Definición y propiedades.
- Aplicaciones a problemas aditivos en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
- Equidistribución y transformadas.
- Caracteres: descomposición de Fourier en $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
- Sumas de Gauss. Pólya–Vinogradov. P-V con un peso continuo o liso.
- *Tópico optativo*: transformada rápida de Fourier.

I.4. Series de Dirichlet con variable real:

- Series de Dirichlet. Series $L(s, \chi)$ y productos de Euler.
- Teorema de Dirichlet y $L(1, \chi) \neq 0$. Suma finita para $L(1, \chi)$.
- Teorema tauberiano de Hardy–Littlewood. Densidades logarítmicas.
- Limitaciones de la variable real.
- *Tópico optativo*: $L(1, \chi)$ y números de clase.

I.5. Análisis de Fourier en $\mathbb{Z}$:

- Definición y propiedades. Fejér y pesos continuos.
- Convolución aditiva y multiplicación de transformadas. Método del círculo.
- Ejemplo: sumas de cuadrados.
- *Tópico optativo*: teorema de Roth sobre las progresiones aritméticas.

Parte II: variable compleja



II.1. *Series de Dirichlet con s complejo:*

- Semiplanos de convergencia y convergencia absoluta
- Prueba de $L(1+it, \chi) \neq 0$ mediante no negatividad.
- La transformada de Mellin y su inversa. Sumas con pesos continuos y lisos.
- Relación con la transformada de Fourier. Principio de la incertidumbre.

II.2. *Teorema de los números primos: prueba tauberiana compleja.*

- Sumas con transformada de Fourier como peso.
- Diferencia entre sumas con peso y sumas con truncación $n \leq x$.
- Tres pruebas de $\zeta(1+it) \neq 0$.
- Prueba de $M(x) = o(x)$ por análisis de Fourier.

II.3. *Formas modulares:*

- Definición. Ejemplo: series de Eisenstein.
- Fórmula de sumación de Poisson. Modularidad de $\theta(s)$
- Dimensión finita. Identidades.

II.4. *La ecuación funcional de $\zeta(s)$:*

- Ecuación funcional por modularidad de $\theta(s)$.
- Función $Z(t)$ de Hardy. Ceros de $\zeta(s)$.
- Ecuación funcional aproximada.

Parte III: tópicos opcionales

- Regiones libres de ceros, Landau–Siegel.
- Gran criba (dualidad y Beurling–Selberg).
- Pequeñas cribas.

Método del círculo: particiones, Waring, Goldbach ternario

13. Bibliografía:

La idea es que el curso sea autocontenido, pero nada lo es completamente. A menudo ayuda ver las cosas desarrolladas de maneras un tanto o muy distintas; tampoco podemos desarrollar todas las matemáticas que precisamos, ni ir en todas las direcciones posibles.

Bibliografía básica

Si alguien fuera a conseguir un solo libro (físico o virtual) para acompañar el curso, debería ser uno de los siguientes: Bateman–Diamond, Montgomery–Vaughan o Tenenbaum. No son intercambiables, pues tienen perspectivas distintas, pero tienen bastante en común. Si se fueran a conseguir dos libros, serían uno de ellos y Murty, que presenta muchas cosas como problemas guiados.

- Bateman, Paul T., y Harold G. Diamond. **Analytic Number Theory: An Introductory Course**. Monographs in Number Theory, vol. 1. World Scientific, 2004.
- Montgomery, Hugh L., y Robert C. Vaughan. **Multiplicative Number Theory I: Classical Theory**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97. Cambridge University Press, 2006.



- Murty, M. Ram. **Problems in Analytic Number Theory**. 2.^a ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 206. Springer, 2008.
- Tenenbaum, Gérald. **Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres**. 5.^a ed. Dunod, 2022. Existe también la traducción inglesa de la tercera edición: **Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory**, Graduate Studies in Mathematics, vol. 163, American Mathematical Society, 2015.

Bibliografía complementaria general

Se comprende que las notas de curso en línea son (o deben ser) «material viviente», corregido y revisado a lo largo del tiempo.

- Apostol, Tom M. **Introduction to Analytic Number Theory**. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1976. Se trata de un texto introductorio adaptado para el pregrado; logra cubrir material sustancial asumiendo muy poco.
- Davenport, Harold. **Multiplicative Number Theory**. 3.^a ed., revisada por Hugh L. Montgomery. Graduate Texts in Mathematics, vol. 74. Springer, 2000. La introducción de la que muchos profesores aprendimos al principio del posgrado; basada en notas de clase de 1966. Véase también Koukoulopoulos.
- Granville, Andrew. **Analytic Number Theory Revealed: A First Guide to Prime Numbers**. American Mathematical Society, 2025.
- Hardy, G. H., y E. M. Wright. **An Introduction to the Theory of Numbers**. 6.^a ed., revisada por D. R. Heath-Brown y J. H. Silverman, con prólogo de Andrew Wiles. Oxford University Press, 2008. El clásico. Está escrito para estudiantes de la primera mitad del siglo XX como texto general de teoría de números; parte desde cero. Es fácil olvidar cuántas cosas ya están hechas allí, especialmente a partir del capítulo X o XI.
- Helfgott, Harald Andrés. **Azar y aritmética: un capítulo de la teoría probabilística de números**, [arXiv:0909.0922](https://arxiv.org/abs/0909.0922), 2009. Para el comienzo del curso se habrán hecho algunas correcciones; díganme si encuentran otras para poder seguir corrigiéndolo.
- Iwaniec, Henryk, y Emmanuel Kowalski. **Analytic Number Theory**. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53. American Mathematical Society, 2004. La obra de referencia. Se consultará por temas; los capítulos son relativamente independientes unos de otros.
- Koukoulopoulos, Dimitris. **The Distribution of Prime Numbers**. Graduate Studies in Mathematics, vol. 203. American Mathematical Society, 2019. Hasta cierto punto, una versión actualizada de Davenport: retoma su estructura, pero también tiene mucha influencia probabilística e incluye métodos de criba.
- Silberman, Lior. **Math 539: Analytic Number Theory**. Apuntes de curso en línea, University of British Columbia, 2016. Somos «de la misma escuela» y tenemos varias influencias en común.
- Tao, Terence. **254A: Analytic Prime Number Theory**. Apuntes de curso en línea, 2015, con adiciones posteriores. El [curso de 2019 del mismo título](#) también es muy bueno, pero va mucho más a tópicos recientes.



Bibliografía complementaria por temas

Análisis de Fourier y análisis real

- Körner, T. W. **Fourier Analysis**. Cambridge University Press, 1988. Responde a la interrogante: ¿es posible tener demasiada cultura general?
- Stein, Elias M., y Rami Shakarchi. **Fourier Analysis: An Introduction**. Princeton Lectures in Analysis, vol. 1. Princeton University Press, 2003.

Tanto Körner como Stein–Shakarchi tratan de hacer lo más posible sin asumir teoría de la medida, pues se trata de textos de pregrado.

- Wheeden, Richard L., y Antoni Zygmund. **Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis**. Pure and Applied Mathematics, vol. 43. Marcel Dekker, 1977. Introducen justo lo necesario de teoría de la medida para poder dar un tratamiento **comme il faut** de lo esencial del análisis de Fourier, cosa que hacen al final del texto.
- Zygmund, Antoni. **Trigonometric Series**. 3.^a ed., con prólogo de Robert Fefferman. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2003. Tarde o temprano tendrán este libro. Dice la leyenda que Calderón afirmaba que era el único libro en el estante de su oficina.

Cada cual tiene sus textos favoritos de análisis real y complejo.

La función zeta

- Titchmarsh, E. C. **The Theory of the Riemann Zeta-Function**. 2.^a ed., revisada por D. R. Heath-Brown. Clarendon Press, Oxford University Press, 1986. Granville tiene una anécdota de cómo pudo haber conseguido este libro por casi nada cuando era estudiante de pregrado, pero no lo hizo porque le parecía ridículo que hubiera un libro sobre solo una función. Fue una mala no-inversión.

Formas modulares

- Apostol, Tom M. **Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory**. 2.^a ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 41. Springer, 1990.
- Iwaniec, Henryk. **Topics in Classical Automorphic Forms**. Graduate Studies in Mathematics, vol. 17. American Mathematical Society, 1997. Más sistemático de lo que **topics** sugiere, y aun así conciso.
- Serre, Jean-Pierre. **A Course in Arithmetic**. Graduate Texts in Mathematics, vol. 7. Springer, 1973. Lo esencial, partiendo desde cero.

Método del círculo

- Davenport, Harold. **Analytic Methods for Diophantine Equations and Diophantine Inequalities**. 2.^a ed., preparada para publicación por T. D. Browning. Cambridge University Press, 2005. Otro clásico (muy anterior a 2005; circulaba como manuscrito), centrado en el problema de Waring.
- Nathanson, Melvyn B. **Additive Number Theory: The Classical Bases**. Graduate Texts in Mathematics, vol. 164. Springer, 1996. Palabras del autor: «escrito para estudiantes que quieren aprender teoría aditiva de números, no para expertos que ya la saben».
- Vaughan, Robert C. **The Hardy–Littlewood Method**. 2.^a ed. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 125. Cambridge University Press, 1997. No traten de leerlo todo la primera vez.



- Wooley, Trevor. [**Analytic Number Theory: Introduction to the Circle Method and Its Application**](#). Apuntes de curso en línea, 2023, por uno de los principales especialistas actuales.

Teoría de cribas

- Cojocaru, Alina Carmen, y M. Ram Murty. **An Introduction to Sieve Methods and Their Applications**. London Mathematical Society Student Texts, vol. 66. Cambridge University Press, 2005. Introducción accesible y amplia.
- Friedlander, John, y Henryk Iwaniec. **Opera de Cribro**. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 57. American Mathematical Society, 2010. Obra masiva; gran alcance.
- Greaves, George. **Sieves in Number Theory**. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 43. Springer, 2001. De nivel intermedio entre Cojocaru–Murty y **Opera de Cribro**; solo criba pequeña. Actualiza en buena medida a Halberstam–Richert.