FORMULARIO
Curso de Posgrado

1. Título: Una introducción al *forcing* – **Abreviatura de título:** Forcing

2. Profesor: Alexandre Miquel (Fing)

3. Responsable: ídem

4. Marque la disciplina más cercana al curso: Fundamentos – Teoría de conjuntos

5. Fecha de inicio y finalización: Segundo semestre de 2024

6. Horas de clase teóricas: 15 × ((2 × 1,5) horas semanales) = 45 horas

7. Horas de clase prácticas/consulta: 15 × ((1 × 2) horas semanales) = 30 horas

8. Otros horarios:

9. Total de horas presenciales (suma de los tres puntos anteriores): 75 horas

10. Método de aprobación: Lista de ejercicios + Examen oral

11. Conocimientos previos recomendados:
Haber cursado el curso de grado: «Fundamentos de la matemática»

12. Programa del Curso:

El método del *forcing* fue introducido por Cohen [Coh63, Coh64] para probar la consistencia relativa de la negación de la Hipótesis del Continuo (CH) con respecto a los axiomas de la teoría de conjuntos (ZFC). En la medida en que la consistencia relativa de la Hipótesis del Continuo (CH) ya había sido probada por Gödel [Göd38], el trabajo de Cohen acabó de establecer la independencia de CH con respecto a los axiomas de ZFC. Siguiendo el cumplimiento de Cohen, el método del *forcing* fue desarrollado y ampliado en el marco de la teoría de modelos [Jec02], y brindó rápidamente otros resultados de independencia en teoría de conjuntos. Al día de hoy, el método del *forcing* es una herramienta estándar de la teoría de conjuntos, que está usada intensivamente en el estudio de los cardinales grandes.

El objetivo de este curso es introducir la teoría del *forcing* y sus resultados básicos. Al contrario del enfoque tradicional basado en la teoría de modelos [Bel85, Jec02], adoptaremos un enfoque axiomático, más adaptado al usuario matemático. En esta perspectiva, presentaremos el *forcing* como un algoritmo (expresado en el marco de las teorías de primer orden) que transforma una axiomatización dada de la teoría de conjuntos (que describe algún universo conjuntista inicial) en otra axiomatización (que describe el correspondiente universo expandido por el método de forcing).

A partir de esta presentación, demostraremos las propiedades estándar del forcing: preservación de los ordinales, decimación de los cardinales (o su preservación bajo ciertas condiciones de cadenas). Estudiaremos varios ejemplos de forcing, tales como la negación de la Hipótesis del Continuo, la negación del Axioma de Elección o la técnica de colapso de cardinales. También relacionaremos la presentación axiomática del *forcing* con la presentación más tradicional de la teoría de modelos, y presentaremos el vínculo con los modelos booleanos [Bel85].

Plan del curso:

- Recordatorios sobre la lógica de primer orden (consistencia relativa, extensiones conservativas, skolemización, relativización, modelos internos) y la teoría de conjuntos (axiomas de ZF, extensiones estándar de ZF, modelos transitivos, jerarquía de Lévy y *absoluteness*).

- El universo constructible de Gödel y el teorema de *absoluteness* de Shoenfield. Consistencia relativa de la Hipótesis Generalizada del Continuo (GCH) y del Axioma de Elección (AC).

- Presentación axiomática del forcing. El conjunto de condiciones (P, ≤), estructura de la teoría de base ***T***, definición y propiedades de la extensión genérica ***T****. Propiedades de la transformación ***T*** → ***T****: recursividad, corrección y completitud.

- Noción de filtro genérico. Axioma de Genericidad y Axioma de Nombres. Preservación de los ordinales, decimación de los cardinales. Representación con P-nombres recursivos. Preservación del Axioma de Elección.

- Ejemplos 1: Añadiendo reales de Cohen para negar la Hipótesis del Continuo. Forzando $2^{\aleph_0} = \aleph_n$ (para todo n ≥ 1), forzando $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$. Por qué $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.
- El álgebra de Boole generada por el conjunto de condiciones. Condiciones de (anti)cadenas y propiedades de preservación de los cardinales relacionadas.

- Ejemplos 2: Más sobre la negación de la hipótesis del continuo. Forzando la existencia de un buen orden sobre $\mathbb{R}$. La técnica de Lévy para colapsar los cardinales.

- Vínculo con los modelos de Tarski y los modelos Booleanos. El punto de vista de los modelos numerables. El lema de Rasiowa-Sikorski.

- (Opcional:) Ejemplo 3: Consistencia relativa del axioma de Soloway («todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son Lebesgue-medibles») con respecto a la existencia de un cardinal inaccesible.

13. Bibliografía: (Si el nombre contiene siglas deberán ser aclaradas)

- [Bel85] J. L. Bell. *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory* (2nd edition). Oxford Logic Guides (Book 12), Oxford University Press, 1985.

- [Bur77] J. P. Burgess. *Forcing.* In J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, pages 403–452. North-Holland, Amsterdam, 1977.

- [Coh63] P. J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 50(6):1143–1148, December 1963.

- [Coh64] P. J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis II. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 51(1):105–110, January 1964.

- [God38] K. Gödel. Consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24(12), 1938.

- [Jec02] T. Jech. *Set theory, third millennium edition* (revised and expanded). Springer, 2002.

FORMULARIO
Curso de Posgrado

1. Título: Introducción a la correspondencia entre las pruebas y los programas.
Abreviatura de título: Correspondencia pruebas-programas.

2. Profesor: Alexandre Miquel (Fing)

3. Responsable: ídem

4. Marque la disciplina más cercana al curso: Fundamentos – Teoría de la prueba

5. Fecha de inicio y finalización: Segundo semestre de 2024

6. Horas de clase teóricas: 15 × ((2 × 1,5) horas semanales) = 45 horas

7. Horas de clase prácticas/consulta: 15 × ((1 × 2) horas semanales) = 30 horas

8. Otros horarios:

9. Total de horas presenciales (suma de los tres puntos anteriores): 75 horas

10. Método de aprobación: Lista de ejercicios + Examen oral

11. Conocimientos previos recomendados:
Haber cursado el curso de grado: «Fundamentos de la matemática».

Aunque el tema involucre nociones de programación funcional, no se requiere ningún conocimiento previo en informática, pues sólo se manipularán nociones básicas de programación funcional que serán introducidas en el marco del curso.

12. Programa del Curso:

Descubierta al final de los años 60, la correspondencia entre las pruebas y los programas – también llamada *correspondencia de Curry-Howard* – relaciona los objetos y conceptos de la *teoría de la demostración* a los objetos y conceptos de la *programación funcional*, mediante una idea a la vez muy sencilla y muy fructífera, a saber que cada fórmula matemática constituye un tipo de datos, mientras cada demostración de dicha fórmula constituye un programa informático que realiza el tipo de datos correspondiente. En otras palabras, la relación «*p* es una prueba de la fórmula *A*» (en lógica) corresponde a la relación «*p* es un programa de tipo *A*» (en programación funcional).

De hecho, la correspondencia de Curry-Howard es una correspondencia múltiple entre la teoría de la demostración y la programación funcional, que no sólo relaciona las fórmulas matemáticas (del lado lógico) a los tipos de datos (del lado informático) y las pruebas a los programas, sino también las reglas de deducción a las reglas de tipado, la corte-eliminación (en deducción natural) a la β-reducción (en el cálculo lambda), el razonamiento por inducción a la programación recursiva, así como, a más alto nivel, la estructuración de la matemática en teorías a la programación modular. En el plano teórico, la correspondencia de Curry-Howard renovó completamente la teoría de la demostración, y ahora constituye una de sus herramientas más fundamentales. En el plano práctico, la correspondencia de Curry-Howard contribuyó al desarrollo de varios asistentes a la prueba basados en este principio, tales como el asistente Coq.

El objetivo de este curso introductorio es plantear las bases de la correspondencia de Curry-Howard en el marco de la lógica intuicionista (o constructiva), a través de la presentación de varios sistemas de tipos que capturan el contenido computacional de varias teorías matemáticas constructivas (especialmente: las aritméticas intuicionistas de primer y de segundo orden).

Plan del curso:

- Deducción natural intuicionista y clásica. Noción de corte, propiedades de las pruebas sin cortes. Teorema de corte-eliminación y consistencia.

- Aritmética de Peano (clásica) y de Heyting (intuicionista). Extensión de la noción de corte a la aritmética (cortes de inducción). Extracción de testigos, extracción de funciones recursivas.

- Cálculo lambda puro: sintaxis, conversión, reducción [Bar84, ch. 2, 3]; vínculo con las funciones recursivas [Bar84, ch. 6].

- Cálculo lambda simplemente tipado [Bar93] e isomorfismo de Curry-Howard en el cálculo proposicional intuicionista [Gir89, ch. 2,3]; teorema de normalización fuerte [Gir89, ch. 6].

- Sistema T de Gödel: definición, expresividad, teorema de normalización fuerte [Gir89, ch. 7]; vínculo con la Aritmética de Heyting.

- Sistema F: presentación según Church [Bar93], expresividad [Gir89, ch. 11]; teorema de normalización [Gir89, ch. 13]; vínculo con la Aritmética de segundo orden: teorema de representación [Gir89, ch. 15].

- Sistema F: presentación según Curry [Bar93]; realizabilidad en la Aritmética Funcional de segundo orden (AF2) [Kri93, ch. 9].

- Sistemas de tipos puros [Bar93]; teoría de tipos de Martin-Löf [NPS90].

13. Bibliografía: (Si el nombre contiene siglas deberán ser aclaradas)

- [Bar84] H. Barendregt. The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics. Vol. 103 of Studies in Logic and The Foundations of Mathematics. North-Holland, 1984.

- [Bar93] H. Barendregt. *Lambda Calculi with Types*, Handbook of Logic in Computer Science, Volume II. Oxford University Press, 1993.
  Web: http://ttic.uchicago.edu/~dreyer/course/papers/barendregt.pdf

- [Gir89] J.-Y. Girard, Y. Lafont, P. Taylor. *Proofs and Types.* Cambridge University Press, 1989. Web: http://www.paultaylor.eu/stable/prot.pdf

- [Kri93] J.-L. Krivine. *Lambda-calculus, types and models.* Ellis Horwood, 1993 (agotado). Web:
  https://www.irif.univ-paris-diderot.fr/~krivine/articles/Lambda.pdf

- [NPS90] B. Nordström, K. Petersson, J. M. Smith. *Programming in Martin-Löf's Type Theory.* Oxford University Press, 1990 (agotado).
  Web: http://www.cse.chalmers.se/research/group/logic/book/book.pdf